Fonctions de plusieurs variables

26 octobre 2022

Dérivée directionnelle - Différentiabilité

Soient E et F 2 esp. de Banach. Soient $U \subset E$, $f : U \to F$, $x^0 \in U$, $v \in E$, $\|v\| = 1$.

- f admet une dérivée directionnelle de dir. $\mathbb{R}v$ en x^0 si $f'_v(x^0) := \lim_{t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0}(f(x^0 + tv) - f(x^0))/t$ existe dans F.
- Dérivées partielles. $U \subset \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, $f'_{e_j}(x^0) = \partial_j f(x^0) = \partial f/\partial x_j(x^0)$.
- f est différentiable en x^0 s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :
  $$\forall x \in U,\ f(x) - f(x^0) = L(x - x^0) + o(x - x^0)$$
  avec : $\lim_{h \underset{\neq}{\longrightarrow} 0} o(h)/\|h\| = 0$, i.e. si f admet un DL à l'ordre 1 en x^0.

  On note $df(x^0) := L$.

  Si f diff. en x^0, alors f est continue en x^0 (DL à l'ordre 1 donc à l'ordre 0 !)
  Si f diff. en x^0 et $\|v\| = 1$ alors $f'_v(x^0) = df(x^0)(v)$.
- f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U. On note alors $df : x \in U \mapsto df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$.

  Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue. Calculer Df.
  Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F; G)$ avec E, F, G de Banach. Calculer $d\varphi$.

Attention. Si f diff. sur U, pour tt. $x \in U$, $df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ mais df n'est pas néc. continue en $x^0 \in U$.

Différentielle et dérivées partielles

On note $x : (x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $x^0 \in U$. Si f est diff. en x^0 alors f admet des dér. partielles en x^0 et :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ df(x^0)(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) h_j.$$

En part. si f admet des dér. part. on connaît la forme de la diff. ... si elle existe.

Soit f diff. sur U. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $x^0 \in U$ si $x \in U \mapsto df(x)$ est continue en x^0.

Théorème. *Pour qu'une fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues sur U.*

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \inf(x^2, y^2)$. Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est $\mathcal{C}^1$.

Graphe - Plan tangent - Surfaces

Soit $f : U \subset E \to F$.

Graphe de f : $\Gamma(f) := \{(x, y) \in U \times F /\ y = f(x)\}$.

Si f diff. en x^0 et si $H := \{(x, y) \in E \times F /\ y = f(x^0) + df(x^0)(x - x^0)\}$, alors H est un sous-espace affine de $E \times F$ tangent à $\Gamma(f)$ en $(x^0, f(x^0))$.

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, alors $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma(f) = n$ et H est l'unique hyperplan afffine de $\mathbb{R}^{n+1}$ (i.e. $dim_{\mathbb{R}} H = n$) tangent à $\Gamma(f)$.
Soit $\Gamma := \{(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3 /\ y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}\}$. Dét. le plan tangent à Γ en $(0, 1, 0)$.

• **Surfaces - I.** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f diff. en $(x_0, y_0) \in U$. Mq. le vecteur $(-\partial_1 f(x_0, y_0), -\partial_2 f(x_0, y_0), 1)$ est orthogonal à $\Gamma(f)$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et déterminer le plan tangent à Γ_f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

• **Surfaces - II.** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, f diff. en (x_0, y_0, z_0) avec $df(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Alors $\dim_{\mathbb{R}} Kerdf(x_0, y_0, z_0) = 2$ et
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ df(x_0, y_0, z_0)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\}$ est tangent à
$S_f := \{(x, y, z) \in U /\ f(x, y, z) = 0\}$ en (x_0, y_0, z_0).

Mq. $\nabla f(x_0, y_0, z_0) : (\partial_1 f(x_0, y_0, z_0), \partial_2 f(x_0, y_0, z_0), \partial_3 f(x_0, y_0, z_0))$ est un vecteur orthogonal à S_f en (x_0, y_0, z_0).

Généraliser à $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $df(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$.

Gradient de f. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diff. sur U. Pour tout $x^0 \in U$ on appelle gradient de f en x^0 le vecteur $\nabla f(x^0)$: $\begin{pmatrix} \partial_1 f(x^0) \\ \vdots \\ \partial_n f(x^0) \end{pmatrix}$.

Le gradient $\nabla f(x^0)$ est l'unique vecteur tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:
$df(x^0)(h) = < \nabla f(x^0), h >$.

Thm. acc. finis. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$, diff. sur U. Soit $a,\ b \in U$ tels que $[a, b] \subset U$. On suppose : $\forall x \in [a, b],\ \|df(x)\| \leq k$. Alors :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k\|b - a\|.$$

Soit U connexe et f diff. sur U avec $Df = 0$ sur U. Mq. f est constante sur U.

Inversion locale et globale

Soit E, F et G 3 esp. de Banach, $U \subset E$, $V \subset F$ et $a \in U$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Thm. inv. locale. *Soit $f : U \xrightarrow{\mathcal{C}^k} F$ telle que $df(a) \in Isom(E;F)$. Alors il existe $U_a \in \mathcal{V}_E(a)$, $V_{f(a)} \in \mathcal{V}_F(f(a))$ tels que $f_{|U_a} : U_a \to f(U_a)$ $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.*

Etudier $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$.

Thm. inv. globale. *$f : U \xrightarrow{\mathcal{C}^k} F$ est un C^k-difféo. de U sur $f(U)$ ssi.*

$$\begin{cases} (i)\ f \text{ est injective} \\ \quad \text{et} \\ (ii)\ df(x) \in Isom(E;F) \text{ pour tout } x \in U. \end{cases}$$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^p$. On note $J(f)$ la mat. jacobienne de f. Alors :

$$df(x) \in Isom(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^p) \Leftrightarrow det\,(J(f)(x)) \neq 0.$$

Fonctions implicites

Soit E, F et G 3 esp. de Banach, $U \subset E$, $V \subset F$ et $a \in U$.

Thm. fonctions implicites. *Soit* $U \subset E \times F$ *et* $f : U \xrightarrow{\mathcal{C}^1} G$.
On suppose :

$$\begin{cases} (i) & \exists (a,b) \in U / f(a,b) = 0_G, \\ (ii) & \partial_y f(a,b) \in Isom(F;G). \end{cases}$$

Alors il existe $U_{(a,b)} \in \mathcal{V}_{E\times F}(a,b)$, $U_a \in \mathcal{V}_E(a)$, $\varphi : U_a \xrightarrow{\mathcal{C}^1} F$ *tels que :*

$$\forall (x,y) \in U_{(a,b)},\ f(x,y) = 0_G \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

De plus : $\forall x \in U_a,\ f(x,\varphi(x)) = 0 \Rightarrow d\varphi(x) = -\left(\partial_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ \partial_x f(x,\varphi(x))$.

Donner l'équation du cylindre vertical au-dessus du cercle de centre $(1/2, 0, 0)$ et de rayon $1/2$.
Que représente géométriquement la courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équations
$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 - x + y^2 = 0$?

Mq. qu'en tt point de $\mathcal{C}$ différent de $(1,0,0)$ on peut représenter $\mathcal{C}$ comme le graphe d'une fonction différentiable.

Différentielles d'ordre supérieur

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur U si f est différentiable sur U et sa différentielle df est de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur U. On note $d^r f(x^0)$ la différentielle de f en un point x^0 de U.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U si f est de classe $\mathcal{C}^r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Thm. de Schwarz. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont les dér. partielles sont diff. sur U (i.e. pr tt $j = 1, \ldots, n$, $\partial_j f : x \in U \mapsto \partial_j f(x)$ est diff. sur U. Alors :

$$\forall i, j = 1, \ldots, n,\ \partial^2_{ij} f = \partial^2_{ji} f.$$

Ici : $\partial^2_{ij} f = \partial_i \left(\partial_j f\right)$.

Rq. L'application $d^2 f : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \sim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ est bilinéaire sym.

Formule de Taylor-Young

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $x^0 \in U$. Alors, au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x^0 + h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(x^0)(h^i) + o(\|h\|^k).$$

Points critiques - Extréma

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diff. sur U. Soit $x^0 \in U$.

On dit que x^0 est un point critique de f si $df(x^0) = 0$.

On dit que x^0 max. (resp. min.) de f sur U si $f(x^0) \geq f(x)$ pour tout $x \in U$ (resp. $f(x^0) \leq f(x)$ pour tout $x \in U$).

Si f a un extremum en x^0 alors x^0 est un point critique de f.

Prop. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$ et soit $x^0 \in U$. Alors :

1. Si f admet en x^0 un min. local, la forme quadratique $d^2 f(x^0)$ est positive.
2. Si f admet en x^0 un max. local, la forme quadratique $d^2 f(x^0)$ est négative.

Le démontrer à l'aide d'un DL.

Prop. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$ et soit $x^0 \in U$ un point critique de f. Alors :

1. Si $d^2 f(x^0)$ est définie positive, f admet un min. local strict au point x^0.
2. Si $d^2 f(x^0)$ est définie négative, f admet un max. local strict au point x^0.

Points critiques - Extréma

On suppose $n = 2$ i.e. $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diff. sur U. On note (x, y) les coord. dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $x^0 \in U$ point critique de f. On pose :

$$r = \partial^2_{11} f(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0), \; s = \partial^2_{12} f(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0), \; t = \partial^2_{22} f(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^0).$$

Alors :

1. Si $rt - s^2 < 0$, la fonction f admet un point de selle au point x^0.
2. Si $rt - s^2 > 0$:
    1. Si $r > 0$, la fonction f admet un minimum local au point x^0,
    2. Si $r < 0$, la fonction f admet un maximum local au point x^0.

Dans tous les autres cas, il faut une étude spécifique.

Extréma liés

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété lisse et $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si $x^0 \in M \cap U$ est un extremum local de la restriction de f à M, alors $T_{x^0} M \subset x^0 + Ker(df(x^0))$.

Thm. extrema liés. Soient $f_1, \dots, f_q : U \subset \mathbb{R}^n \to R$ des fonctions indépendantes de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si la fonction f restreinte à la sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ définie par les équations $f_1 = \cdots = f_q = 0$ admet un extremum local au point $x^0 \in M$, alors il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ tels que

$$df(x^0) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j df_j(x^0).$$

Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Exemple. Déterminer le (ou les) point(s) de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 3y = 3$ le plus proche de l'origine.